

Қатысушының шешімдерін толтыруға арналған өріс / Поле для заполнения решений участника Парақ / Страница №

Задание 1

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \leq a^3 + b^3 \quad a + b = 1$$

$$\frac{(a+b)^2 - 2ab}{2} \leq (a+b)(a^2 - 2ab + b^2)$$

$$\frac{(a+b)^2 - 2ab}{2} \leq (a+b)((a+b)^2 - 3ab)$$

Заменим $a+b$ на 1.

$$1 - 2ab \leq 2 \cdot 1 (1^2 - 3ab)$$

$$1 - 2ab \leq 2 - 6ab$$

$$-1 + 4ab \leq 0$$

$$4ab \leq 1$$

$$ab \leq \frac{1}{4}$$

Докажем это при помощи неравенства Коши:

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \sqrt{a^2 b^2}$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$(a+b)^2 - 2ab \geq 2ab$$

$$(a+b)^2 - 4ab \geq 0$$

Заменим $a+b = 1$

$$1^2 - 4ab \geq 0$$

$$-4ab \geq -1 \quad | : (-1)$$

Знак неравенства меняется, т.к обе части
умножили на отрицательное число

$$4ab \leq 1$$

$$ab \leq \frac{1}{4}, \text{ что совпадает, т.е. д.}$$

Задание 2.

2 девочки и 7 мальчиков

Значит сначала мы можем варианты распределить 6 мальчиков по 3 группы, а потом уже варианты добавить 2 девочек и 1 мальчика.

$$1 \text{ группа: } C_7^2 = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{2 \cdot 1 \cdot 5!} = 21 \text{ вариант выбрать 2х мальчиков для 1 группы}$$

$$\text{Для 2-ой же группы мы выбираем уже 2 мальчика из 5 (первый вариант)}$$

$$2 \text{ группа: } C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2! \cdot 1 \cdot 2} = 10 \text{ вариантов}$$

Парақтың артқы жағын толтырмаңыз / Обратную сторону листа не заполнять

Қатысушының шешімдерін толтыруға арналған өріс / Поле для заполнения решений участника Парақ / Страница №

вводра 2х мальчиков дие 2^{ей} групп

Дие 3^{ей} групп вводраем уше из 3 мальчиков: (порядок важен)

3 групп: $C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3!}{2!} = 3$ варианта вводра мальчиков дие 3^{ей} групп

Получим это у нас есть 2 девочки и 1 оставшийся мальчик, их мы добавим по 1 в группу, тогда количество вариантов их определения в группу можно посчитать способом перестановки $3!$ - 6 вариантов

Итого:

$(C_7^2 \cdot C_5^2 \cdot C_3^2)$ - всего вариантов распределения мальчиков по 2 в группу

$$21 \cdot 10 \cdot 3 = 630$$

$630 \cdot 3! = 630 \cdot 6 = 3780$ вариантов всего (уже вместе с 2ми девочками и оставшимся мальчиком)

Ответ: 3780 способами

Задача 4.

Дано: ABCD - квадрат,

окр (C; R), окр (D; R)

окр (C; R) $\cap$ окр (D; R) = E

AB = 2

Найти: AE

Решение:

1) $OM = OA = OE = R, \Rightarrow \frac{AB}{2} = 1$ ер.

2) Построим квадрат со стороной 1 AOMN

3) Проведем диагональ ON, ($\cdot$) E $\in$ ON

4) $\angle AON = \angle NOM$ по св-ву диагонали квадрата $\Rightarrow$ по 45°

5) Разсмотрим теорему косинусов дие $\triangle AOE$.

$$AE^2 = AO^2 + OE^2 - 2 \cdot AO \cdot OE \cdot \cos \angle AOE$$

$$AE^2 = 1 + 1 - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$AE^2 = 2 - \sqrt{2}$$

$$AE = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \text{ ер}$$

Ответ: $AE = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$ ер