

№1

Дано:

$$a, b \in \mathbb{N}$$

$$a, b \geq 0$$

$$a + b = 1$$

Доказать:

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \leq a^3 + b^3 \leq a^2 + b^2$$

Доказательство:

1) Если a и $b \geq 0$, и $a + b = 1$, то есть 2 варианта решения.

2) 1 Случай $a = 1, b = 0$, подставив $\frac{1^2 + 0^2}{2} \leq 1^3 + 0^3 \leq 1^2 + 0^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq 1 \leq 1$, верно.

2 Случай $a = 0, b = 1$, тогда $\frac{0^2 + 1^2}{2} \leq 0^3 + 1^3 \leq 0^2 + 1^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq 1 \leq 1$, верно.

3) Если $a = 0$ и $b = 0$, неравенство выполняется $0 \leq 0 \leq 0$, но $0 + 0 \neq 1$, что не соответствует условию.

Если $a = 1$ и $b = 1$, неравенство выполняется $1 \leq 1 \leq 1$, но $1 + 1 \neq 1$, что также не соответствует условию, тогда

следует, что $\frac{a^2 + b^2}{2} \leq a^3 + b^3 \leq a^2 + b^2$, при $(1; 0)$ и $(0; 1)$

Ведь если a и b будут > 1 , то то неравенство не выполнено. Потому, что при повышении a и b увелич. и значение неравенства. (Монотонное). т.т.д.

№ 2

Дано:

$$a, b \in \mathbb{N}$$

$$a^2 = b(b+5) - 2$$

Найти все пары (a, b) .

Решение:

$$a^2 = b(b+5) - 2$$

$$a^2 = b^2 + 5b - 2, \text{ тогдa } a > b.$$

Пусть: 1) $b = 1$, $a = 2$, подставим

$$2^2 = 1(1+5) - 2 = 6 - 2 = 4.$$
$$4 = 4, \text{ верно. } \checkmark$$

$$2) b = 3, a^2 = 3(3+5) - 2 = 24 - 2 = 22 \quad \emptyset$$

$$3) b = 4, a^2 = 4(4+5) - 2 = 36 - 2 = 34 \quad \emptyset$$

$$4) b = 5, a^2 = 5 \cdot 10 - 2 = 48 \quad \emptyset$$

$$5) b = 6, a^2 = 6 \cdot 11 - 2 = 64 \Rightarrow a = 8, \text{ верно } \checkmark$$

$$6) b = 7, \quad \emptyset \quad \text{и т.д.} \quad \text{Метод подбора.}$$

Ответ: $(1; 2)$, $(8; 6)$.

№3 Дано:

a) $(m; n) \quad m, n \in \mathbb{N}$

$\text{НОК}[m; n] = 15.$

Найти количество пар $(m; n)$

Решение:

1) ~~$(15; 30)$~~ , ~~$(15; 15)$~~ , Пусть, число $m = x, n = y.$

$x \equiv 0 \pmod{15}$

$y \equiv 0 \pmod{15}$, но если число делится на 15, то оно также делится на 3 и на 5.

Если число $x \equiv 15$ без остатка, то $15x \equiv 0 \pmod{15}$,

также и с y , $15y \equiv 0 \pmod{15}$

Но это значит, что оба числа будут делиться на 5; 3. что показывает, что нет пар чисел $(m; n)$, чтобы их НОК был равен 15.

Ответ: 0 пар.

б) Дано:

$(m; n) \quad m, n \in \mathbb{N}$

$\text{НОК}(m; n) = 2025.$

Найти количество пар $(m; n)$

Решение:

$2025m \equiv 0 \pmod{2025}$

$2025n \equiv 0 \pmod{2025}$, а значит если число делится на 2025 без остатка, то оно делится и на 5.

Это означает, что таких пар чисел нет.

Ответ: 0 пар.

№4

Дано:

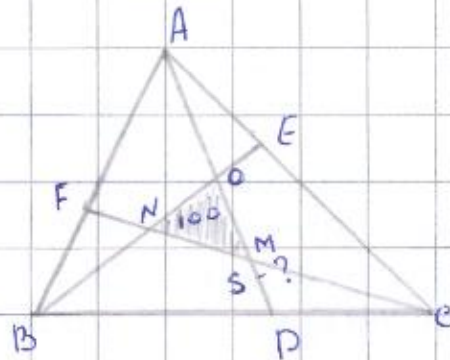
$\triangle ABC$

$D \in BC, E \in CA, F \in AB$.

$BD:DC = CE:EA = AF:FB = 3:2$.

$S_{\text{мал. } \triangle} = 100 \text{ см}^2$.

Найти $S_{\triangle ABC} - ?$



Решение:

$$1) S_{ABC} = S_{AOE} + S_{FBN} + S_{DCM} + S_{AFM} + S_{ECN} + S_{BON} - 200 =$$

$$= 2600 - 200 = 2400 \text{ см}^2.$$

$$S_{BEC} = \frac{3}{5} AC + BC + BE$$

$$S_{BAE} = \frac{2}{5} AC + AB + BE.$$

Пусть:

$$AC = 5x$$

$$CE = 3x, AE = 2x$$

$$S_{ABC} = S_{BEC} + S_{BAE} = 3x \cdot BC \cdot BE + 2x \cdot (AB) \cdot BE =$$

$$= 2x \cdot BE (x \cdot BC + AB)$$

$$\triangle NOM \sim \triangle NEC, \text{ общий } \angle N,$$

$$ON \in AE, MN \in CN.$$

$$\text{Ответ: } S_{ABC} = 2400 \text{ см}^2.$$