

№1:
 $\frac{a^3+b^3}{2} \leq a^3+b^3 \leq a^4+b^4, a+b=1, a \geq 0, b \geq 0.$

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2+b^2-ab)=a^2+b^2-ab, \text{ т.к. } a+b=1 \text{ (по условию).}$$

Из этого очевидно, что при любых $a, b \geq 0, a+b=1$ выполняются неравенства $a^2+b^2 \geq a^2+b^2-ab$ и $a^2+b^2 \geq \frac{a^2+b^2}{2}$.

Теперь докажем, что $a^3+b^3 \geq \frac{a^2+b^2}{2}, b=1-a$ (по условию).

$$\begin{aligned} (a+b)(a^2+b^2-ab) &= a^2+b^2-ab = a^2+(1-a)^2-a(1-a) = a^2+1-2a+a^2- \\ &-a+a^2 = 3a^2-3a+1. \end{aligned}$$
$$\frac{a^2+(1-a)^2}{2} = \frac{a^2+1-2a+a^2}{2} = a^2-a+\frac{1}{2}.$$

$$a^2-a+\frac{1}{2} \leq 3(a^2-a+\frac{1}{3}) \quad | :3$$

$$\frac{a^2}{3}-\frac{a}{3}+\frac{1}{6} \leq a^2-a+\frac{1}{3}, \text{ что очевидно при любых } a \geq 0$$

N2:

$$a^2 = b(b+5) - 2. \quad a^2 = b^2 + 5b - 2.$$

~~Пусть~~ $a, b \in \mathbb{N}$. Пусть $a^2 = f(x)$, а $b^2 + 5b - 2 = g(x)$.

$f(x)$ и $g(x)$ - парабола, ветви направлены вверх, значит при $a, b \in \mathbb{N}$ они имеют 1 точку пересечения.

$$b \in \left[\frac{-5 + \sqrt{33}}{2}; +\infty \right).$$

$$\begin{cases} a^2 = 1 \\ b \notin \mathbb{N} \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 = 4 \\ b \notin \mathbb{N} \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 = 9 \\ b \notin \mathbb{N} \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 = 16 \\ b \notin \mathbb{N} \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 = 25 \\ b \notin \mathbb{N} \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 = 36 \\ b \notin \mathbb{N} \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 = 49 \\ b \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = 64 \\ b^2 + 5b - 66 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2 + 5b - 2 = 64 \\ b_1 = 6 \quad b_2 = -11 \text{ (не подходит по условию)} \end{cases}$$

Ответ: $a = 8, b = 6$.

№3:

a). $15 = 15 \cdot 1 = 5 \cdot 3$. Табуғам 2 пар чисел: 15 и 1, 5 и 3. Уа

НОК: $\text{НОК}[15, 1] = 15$; $\text{НОК}[5, 3] = 15$. Оубем: 2.

b). $2025 = 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$. Табуғам 8 пар чисел: 2025 и 1,

15 и 135, 45 и 45, 405 и 5, 81 и 25, 3 и 675, 75 и 27, 9 и 225.

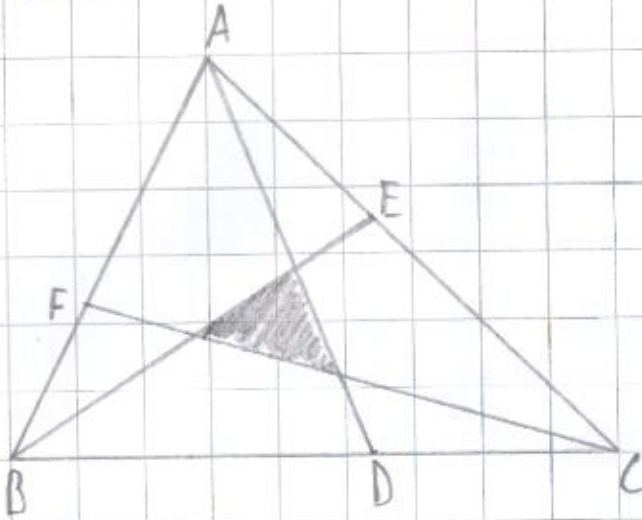
Уа НОК: $\text{НОК}[2025, 1] = 2025$; $\text{НОК}[15, 135] = 135$; $\text{НОК}[45, 45] =$

$= 45$; $\text{НОК}[405, 5] = 405$; $\text{НОК}[81, 25] = 2025$; $\text{НОК}[3, 675] = 675$;

$\text{НОК}[75, 27] = 675$; $\text{НОК}[9, 225] = 225$. Оубем: 2.

Қатысушының шешімдерін толтыруға арналған өріс / Поле для заполнения решений участника

№4:



$$S_{ABC} = S_{\text{шaded}} \cdot 10 = 100 \cdot 10 = 1000$$

Ответ: 1000