

$$\frac{a^2+b^2}{2} \leq a^3+b^3 \leq a^2+b^2$$

$$a^3+b^3 \leq a^2+b^2$$

$$a^3 \leq a^2, \quad b^3 \leq b^2$$

$$a^3+b^3 \leq a^2+b^2$$

$$a^3+b^3 \geq \frac{a^2+b^2}{2}$$

$$a^3+b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = 1 - 3ab$$

$$\frac{a^2+b^2}{2} = (a+b)^2 - 2ab = 1 - 2ab$$

$$\frac{a^2+b^2}{3} = \frac{1}{2} - ab$$

$$a^3+b^3 - \frac{a^2+b^2}{2} = (1-3ab) \left(\frac{1}{2} - ab \right) - \frac{1}{2} = 2ab$$

$$ab \leq \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2} - 2ab \geq \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{4} = 0$$

$$a^3+b^3 \geq \frac{a^2+b^2}{2}$$

ответ: $\frac{a^2+b^2}{2} \leq a^3+b^3 \leq a^2+b^2$ - это и требовалось

доказать.

Қатысушының шешімдерін толтыруға арналған өріс / Поле для заполнения решений участника Парақ / Страница №

$$a^2 = b(b+5) - 2$$

$$a^2 = b^2 + 5b - 2$$

$$4a^2 = 4b^2 + 20b - 8$$

$$4a^2 = (2b)^2 + 2 \cdot 2b \cdot 5 + 25 - 25 = 8$$

$$4a^2 = (2b+5)^2 - 33$$

$$(2b+5)^2 - 4a^2 = 33$$

$$(2b+5)^2 - (2a)^2 = 33$$

$$(2b+5-2a)(2b+5+2a) = 33$$

$$\begin{cases} 2b+5-2a = 1 \\ 2b+5+2a = 33 \end{cases}$$

$$4b+10 = 34$$

$$4b = 24$$

$$b = 6$$

пара $(a, b) = (8; 6)$, является решением

$$\begin{cases} 2b+5-2a = 3 \\ 2b+5+2a = 11 \end{cases}$$

$$4b+10 = 14$$

$$4b = 4 \quad 4a = 8$$

$$b = 1 \quad a = 2$$

пара $(a, b) = (2, 1)$ является решением.

ответ: $\left(1, \overset{a}{33}\right)$ и $\left(2, \overset{b}{1}\right)$

$$a) \text{НОК}[m, n] = 15$$

$$m = 3^{a_1} \cdot 5^{a_2} \quad \text{и} \quad n = 3^{b_1} \cdot 5^{b_2}$$

$$\text{НОК}_{m,n} = 3^{\max(a_1, b_1)} \cdot 5^{\max(a_2, b_2)}$$

$$\text{НОК}[m, n] = 15 \text{ следует, что } \max(a_1, b_1) = 1$$

$$\max(a_2, b_2) = 1$$

пары: $(0; 1)$, $(1; 0)$, $(1; 1)$

$$b) \text{НОК}[m, n] = 2025 \text{ следует: } \max(a_1, b_1) = 4$$

$$\max(a_2, b_2) = 4$$

пары: $(0; 4)$, $(1; 4)$, $(2; 4)$, $(3; 4)$, $(4; 4)$, $(4; 3)$, $(4; 2)$, $(4; 1)$.

Всего: $2 \cdot 4 + 1 = 9$ вариантов

$$9 \cdot 9 = 81 \text{ пар}$$

ответ: 81 пар всего

$$x = \frac{BD}{DC} = \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{CE}{EA} = \frac{3}{2}$$

$$z = \frac{AF}{FB} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{S_{\text{кумр.}}}{S_{ABC}} = \frac{x y z - 1}{(x y + x + 1)(y z + y + 1)(z x + z + 1)}$$

$$x = y = z = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$(1,5^3 - 1)^2 = (3,375 - 1)^2 = 2,375^2 = 5,64$$

$$(1,5 \cdot 1,5 + 1,5 + 1)^2 = 2,25 + 1,5 + 1 = 4,75$$

$$4,75^3 = 107,17$$

$$\frac{S_{\text{кумр.}}}{S_{ABC}} = \frac{5,64}{107,17} = \frac{1}{19}$$

$$S_{ABC} = 100 \cdot 19 = 1900$$

ответ: Площадь треугольника равна $S_{ABC} = 1900$